

# Часть 1. Неопределенный интеграл.

## §1. Первообразная и неопределенный интеграл.

В дифференциальном исчислении решалась задача, где по данной функции  $y = f(x)$  находилась ее производная или дифференциал.

В интегральном же исчислении решается обратная задача: по дифференциалу данной функции находится сама функция. Этот процесс называется **интегрированием**.

**Определение 1.** *Первообразной* от функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  называется функция  $F(x)$ , производная которой в каждой точке отрезка равна  $f(x)$ , т.е.

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

**Пример.**

$$f(x) = 5x^4 \Rightarrow F(x) = x^5 ;$$
$$F(x) = x^5 + 10 ; F(x) = x^5 - 20 \text{ и т.д.}$$

Таким образом, первообразных для данной функции  $f(x)$  может быть бесчисленное множество.

**Теорема.** Две различные первообразные одной и той же функции  $f(x)$ , определенные на некотором промежутке, отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

**Доказательство:** Пусть  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  две первообразные одной и той же функции  $f(x)$ . Докажем, что они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

По определению первообразной:

$$F_1'(x) = f(x) \text{ и } F_2'(x) = f(x)$$

Найдем производную разности первообразных:

$$(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow$$

$$(F_1(x) - F_2(x))' = 0 \text{ значит}$$

$$F_1(x) - F_2(x) = c \Rightarrow F_1(x) = F_2(x) + C,$$

ч.т.д.

**Вывод:** прибавляя к какой-либо первообразной  $F(x)$  все возможные постоянные значения  $C$ , можно получить все первообразные для данной функции  $f(x)$ , т.е.  $F(x) + C$  - это есть совокупность всех первообразных для функции  $f(x)$ .

**Определение 2.** Общее выражение для всех первообразных данной непрерывной функции  $f(x)$  называется **неопределенным интегралом** от этой функции и обозначается

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \text{ где}$$

$f(x)$  - подынтегральная функция;

$f(x) dx$  - подынтегральное выражение;

$F(x)$  - первообразная для  $f(x)$ ;

$C$  - постоянная интегрирования;

$x$  – переменная интегрирования;

$\int$  - знак интеграла.

**Определение 3.** Действие нахождения первообразной для функции  $f(x)$  называется **интегрированием** данной функции.

**Пример.**  $\int 5x^4 dx = x^5 + C$  ;  $\int 10x^9 dx = x^{10} + C$  ;

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$
 ;  $\int \cos x dx = \sin x + C$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

## §2. Основные свойства неопределенного интеграла.

$$\int f(x) dx = F(x) + C \qquad F'(x) = f(x)$$

**1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:**

$$\left( \int f(x) dx \right)' = f(x)$$

**Доказательство:**

$$\left( \int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$$

**Замечание.** На этом свойстве основывается проверка правильности нахождения неопределенного интеграла.

**2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:**

$$d\left( \int f(x) dx \right) = f(x) dx$$

$$dy = y' dx$$

**3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен самой этой функции с точностью до постоянного слагаемого:**

$$\int d(F(x)) = F(x) + C$$

**4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:**

$$\int A \cdot f(x) dx = A \int f(x) dx, \quad A \neq 0$$

**5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от каждой функции:**

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$$

**6. Свойство инвариантности:** всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановки вместо  $x$  любой дифференцируемой функции от  $x$ .

Если  $\int f(x) dx = F(x) + C$  и  $u = \varphi(x)$ , то

$$\boxed{\int f(u) du = F(u) + C}.$$

На этом свойстве основан метод непосредственного интегрирования.

**Пример.** Так как  $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ , то

$$\int \sin^2 x d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

$$\int (e^x)^2 d(e^x) = \frac{(e^x)^3}{3} + C$$

$$\int (\ln x)^2 d(\ln x) = \frac{(\ln x)^3}{3} + C \quad \text{и т.д.}$$

**Замечание.** Не путать с интегралами:

$$\int \sin^2 x dx \quad ; \quad \int (e^x)^2 dx \quad ; \quad \int (\ln x)^2 \cdot dx$$

### §3. Таблица основных интегралов.

$$1. \int dx = x + C$$

$$2. \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$3. \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$$

$$4. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$5. \int e^u du = e^u + C$$

$$6. \int \cos u du = \sin u + C$$

$$7. \int \sin u du = -\cos u + C$$

$$8. \int \operatorname{tg} u du = -\ln |\cos u| + C$$

$$9. \int \operatorname{ctg} u du = \ln |\sin u| + C$$

$$10. \int \sec^2 u du = \int \frac{1}{\cos^2 u} du = \operatorname{tgu} + C$$

$$11. \int \operatorname{cosec}^2 u du = -\operatorname{ctgu} + C$$

$$12. \int \sec u du = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

$$13. \int \operatorname{cosec} u du = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C$$

$$14. \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$$

$$15. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C$$

$$16. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$$

$$17. \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{u}{a} + C$$

$$18. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$$

**Замечания:** 1) Все формулы данной таблицы можно проверить путем дифференцирования, так как интегрирование есть действие обратное дифференцированию.

$$\int \operatorname{ctg} u \, du = \ln |\sin u| + C$$

$$(\ln |\sin u| + C)' = \frac{(\sin u)'}{\sin u} = \frac{\cos u}{\sin u} = \operatorname{ctg} u$$

2) Данные интегралы принято называть табличными и основная задача интегрирования состоит в том, чтобы свести данный нам интеграл к табличному или нескольким табличным (если это возможно).

**Пример.** Найти интегралы по таблице:

$$1) \int \frac{dx}{x^2 - 100} = \frac{1}{20} \ln \left| \frac{x-10}{x+10} \right| + C \quad - (15)$$

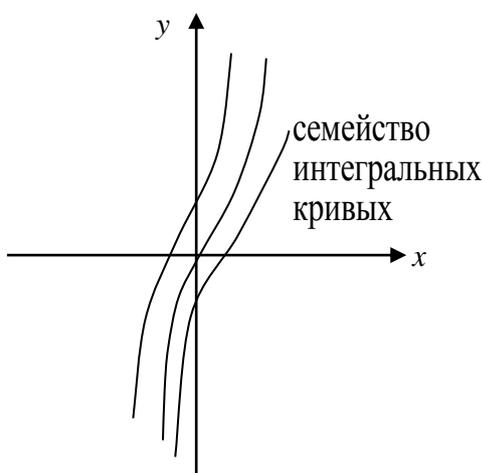
$$2) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 81}} = \frac{1}{9} \operatorname{arcsec} \frac{x}{9} + C \quad - (17)$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{2} + C \quad - (16)$$

## §4. Геометрический смысл неопределенного интеграла.

С геометрической точки зрения неопределенный интеграл представляет собой семейство интегральных кривых вида  $y = F(x) + C$ , где  $F(x)$  - одна из первообразных функции  $f(x)$ . Интегральные кривые получаются друг из друга, путем параллельного переноса вдоль оси ОУ.

### Пример.



$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

$$f(x) = 3x^2 \quad ; \quad F(x) = x^3$$

$$\boxed{y = x^3 + C}, \text{ если}$$

$$c = 0$$

$$y = x^3$$

$$c = 1$$

$$y = x^3 + 1$$

$$c = -1$$

$$y = x^3 - 1$$

и т.д.

**Правило:** чтобы из семейства интегральных кривых  $y = F(x) + C$  выделить одну определенную кривую, нужно задать некоторые дополнительные условия для того, чтобы данная кривая, например, проходила через некоторую точку  $M(x_0; y_0)$ . Эти условия называются ***начальными***, т.е. при  $x = x_0$  ;  $y = y_0$ .

С помощью этих условий можно найти постоянную величину  $C$ :

$$y_0 = F(x_0) + C \Rightarrow C = y_0 - F(x_0)$$

**Пример.** Выделить из предыдущего семейства кривую, проходящую через точку  $A(-1; 3)$ .

$y = x^3 + C$ . Подставим в это уравнение координаты точки  $A$ .

$$3 = (-1)^3 + C$$

$$C = 3 + 1$$

$$C = 4$$

$\Rightarrow$

$$\underline{y = x^3 + 4}$$

## **§5. Методы непосредственного интегрирования.**

## 1. Интегрирование по таблице.

Заключается в прямом использовании табличных интегралов.

### Пример.

$$1) \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 4} \right| + C$$

## 2. Интегрирование разложением подынтегральной функции на сумму функций.

Этот метод основан на пятом свойстве интегралов: интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций.

### Пример.

$$1) \int (3x^3 + 5x^2 - x + 2) dx = \int 3x^3 dx + \int 5x^2 dx - \int x dx + \int 2 dx = \\ = 3 \frac{x^4}{4} + 5 \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + C$$

$$2) \int \frac{x^2 + x + 1}{x^2} dx = \int \left( \frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \\ = \int dx + \int \frac{dx}{x} + \int x^{-2} dx = x + \ln|x| - \frac{1}{x} + C$$

## 3. Непосредственное интегрирование.

### 3.1. Интегрирование путем подведения функции под знак дифференциала.

Основан на свойстве инвариантности формулы неопределенного интеграла.

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad \text{если } u = \varphi(x), \quad \text{то}$$

$$\int f(u) du = F(u) + C$$

**Пример.**

1)

$$\int \cos x \cdot \sin x \cdot dx = \int \sin x d(\sin x) = \frac{\sin^2 x}{2} + C, \quad \text{т.к. } \int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$2) \int e^{\operatorname{tg} x} \cdot \sec^2 x dx = \int e^{\operatorname{tg} x} d(\operatorname{tg} x) = e^{\operatorname{tg} x} + C$$

$$(dy = y' dx)$$

$$3) \int \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)} = \int \frac{d(\ln x)}{1 + \ln^2 x} = \operatorname{arctg}(\ln x) + C$$

### 3.2. Добавление постоянного слагаемого под знак дифференциала.

При любой постоянной  $a$  будет выполняться равенство:

$$d(x + a) = dx. \quad \text{Значит, и наоборот}$$

$$dx = d(x + a) \quad \text{и поэтому}$$

$$\boxed{\int f(x) dx = \int f(x) d(x + a)},$$

т.е. под знак дифференциала можно ввести любое постоянное слагаемое.

**Пример.**

$$1) \int \frac{dx}{x+5} = \int \frac{d(x+5)}{x+5} = \ln|x+5| + C$$

$$2) \int (x-7)^5 dx = \int (x-7)^5 d(x-7) = \frac{(x-7)^6}{6} + C$$

### 3.3. Введение под дифференциал постоянного множителя.

Если  $a = \text{const}$ , то  $d(ax) = adx$ . Отсюда при  $a \neq 0$  -  $dx = \frac{1}{a}d(ax)$ . Следовательно,

$$\int f(x) dx = \frac{1}{a} \int f(x) d(ax),$$

т.е. под знак дифференциала можно ввести любой постоянный множитель, разделив на него интеграл.

**Пример.**

$$1) \int \sin 7x dx = \frac{1}{7} \int \sin 7x d(7x) = -\frac{1}{7} \cos 7x + C$$

$$2) \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int e^{2x} d(2x) = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

$$3) \int \cos \frac{x}{3} dx = 3 \int \cos \frac{x}{3} d\left(\frac{x}{3}\right) = 3 \sin \frac{x}{3} + C$$

**Замечание.** Возможно одновременно применять оба только что указанных приема.

**Пример.**

$$\int \frac{dx}{4x+7} = \frac{1}{4} \int \frac{d(4x+7)}{4x+7} = \frac{1}{4} \ln |4x+7| + C$$

**3.4. Интеграл от дроби, числитель которой является производной знаменателя, равен логарифму знаменателя.**

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \int \frac{d(\varphi(x))}{\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)| + C$$

**Пример.**

1)

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7} dx = \int \frac{(x^2+3x+7)' dx}{x^2+3x+7} = \int \frac{d(x^2+3x+7)}{x^2+3x+7} = \ln|x^2+3x+7| + C$$

$$2) \int \frac{x}{x^2+9} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+9} = \frac{1}{2} \ln|x^2+9| + C$$